数理解析研究所講究録
784巻 1992年 139-144

Alexandroff width とコホモロジー次元

小山 晃 (大阪教育大学 数理科学)

Alexandroffによる古典的な次元の特徴づけ:

compact距離空間 X が n 次元以下である必要十分条件は、
任意の $\varepsilon > 0$ に対して、高々 n 次元の compact polyhedron P と
ε-map $f : X \longrightarrow P$ が存在することである

を動機として、次の Alexandroff width の概念を考える。

compact subset $X \subseteq \mathbb{R}^n$ (ここで、$n \geq 1$ は十分大きなものを考える) の k 次元
Alexandroff width $a_k(X)$ を

$$\inf\{\varepsilon > 0 \mid \text{高々} k \text{次元の compact polyhedron } P \text{ と } \varepsilon\text{-map } X \longrightarrow P \text{ が存在する}\}$$

によって与える

Alexandroff width の概念は単純な定義の書き換えでナンセンスなもののように見えるかもしれないが、ひょんな所から結構威力のある所を見せることがあった。すなわち、CE-problem を次の Alexandroff width の問題に置き換えることができる。

compact polyhedron $P \subseteq \mathbb{R}^n$ の k-次元 Alexandroff width $a_k(P)$ は、
P の任意の triangulation T の $(k+1)$-skeleton $T^{(k+1)}$ の k-次元 Alexandroff
width $a_k(|T^{(k+1)}|)$ と等しいか?

実際、CE-problem は negative に解決されたのだから、この問題は意味を失った

ように見えるが、2つの問題の関連を追求すると整係数コホモロジー次元の特徴づけがAlexandroff widthとその拡張された概念によって最初のAlexandroffの結果に対応して得られることがShchepin[1]によって示された。

ここでは、より一般的にコホモロジー次元との関連をとらえる試みを示したい。

特にことわらない限り、空間はcompact距離空間であり、Gは任意の可換群とする。

定義：連続写像 $f: X \longrightarrow Y$ のG係数コホモロジー次元がn以下であるとは、任意の閉部分集合$B \subseteq Y$と任意の連続写像 $\varphi: B \longrightarrow K(G,n)$ に対して、

連続写像 $\bar{\varphi}: X \longrightarrow K(G,n)$

s.t. $\bar{\varphi}|f^{-1}(B) = \varphi \circ f|f^{-1}(B)$

が存在することであり、

$$\text{c-dim}_G f \leq n$$

と表わす。

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[rrd, dashed, "\bar{\varphi}"] & Y & \\
f^{-1}(B) \arrow[u, hook] \arrow[r, "f|f^{-1}(B)"'] & B \arrow[u, hook] \arrow[r, "\varphi"'] & K(G,n)
\end{tikzcd}$$

この概念を用いて連続写像 $f: X \longrightarrow Y$ のG係数Alexandroff widthの概念を次のように定義する。

定義. $G\text{-}a_k(f) = \inf\{d(f,h) \mid$ 連続写像 $h: X \longrightarrow Y$ s.t. $\text{c-dim}_G h \leq k\}$

さらに、G係数binary (n,k)-次元Alexandroff widthを

$$G\text{-}a_k^n(f) = \sup\{G\text{-}a_k(f \circ \varphi) \mid \text{連続写像 } \varphi: Z \longrightarrow X \text{ s.t. } \dim Z \leq n\}$$

と定義する。

(注1) $G\text{-}a_k^n(f) = 0$ である必要十分条件は、任意の連続写像 $\varphi: Z \longrightarrow X$, $\dim Z \leq n$

と $\varepsilon>0$ に対して、

連続写像 $h: Z \longrightarrow Y$ s.t. $d(f\circ\varphi, h)<\varepsilon$ & $c\text{-}\dim_G h \le k$

が存在することである。

係数群を考えない連続写像の Alexandroff width は Shchepin [1] によって次のように与えられている。

定義. 連続写像 $f: X \longrightarrow Y$ について、k次元 Alexandroff width $a_k(f)$ を、

$a_k(f) = \inf\{d(f,h) \mid$ 連続写像 $h: X \longrightarrow Y$ s.t. $\dim h(X) \le k\}$

さらに、binary (n,k)-次元 Alexandroff width $a_k^n(f)$ を、

$a_k^n(f) = \sup\{a_k(f\circ\varphi) \mid$ 連続写像 $\varphi: Z \longrightarrow Y$ s.t. $\dim Z \le n\}$

と定義する。

(注2) 定義から、直ちに次のことがわかる

$$G\text{-}a_k^n(f) \le G\text{-}a_k(f) \le a_k(f) \le \operatorname{diam}[Y]$$

& $$G\text{-}a_k^n(f) \le a_k^n(f) \le a_k(f) \le \operatorname{diam}[Y]$$

(注3) (注1) と Edwards-Walsh complex を用いると次のことは明らか。

$$a_m^{n+1}(f) = 0 \Longleftrightarrow \mathbb{Z}\text{-}a_{n+1}^n(f) = 0 \quad \text{for all map } f: X \longrightarrow P$$

よって、Shchepin [1] は整係数コホモロジー次元の特徴づけとして、上の連続写像に関する Alexandroff width の概念を導入しているが、ここで導入した係数群のついた連続写像の Alexandroff width の概念が自然な拡張であることがわかる。

ここで導入した概念によって次のことがわかればよいのだが(?)

問題1. 次の conditions は同値か?

1) $c\text{-}\dim_G X \leq n$

2) $G\text{-}a_n^{n+1}(X) = 0$

3) 任意の連続写像 $f: X \longrightarrow P$, ただし. P は polyhedron, に対して.
$G\text{-}a_n^{n+1}(f) = 0$

いろいろ試してみたが. この問題が成立するとはちょっと思えない。実際、[2]で導入した approximable 次元について成立すると考える方が自然だと考えている。

定義. polyhedra 間の連続写像 $\varphi: Q \longrightarrow P$, $n \geq 1$ & $\varepsilon > 0$ について.
φ が (G, n, ε)-approximable であるとは. 次の condition (*) をみたす P の triangulation L が存在することをいう。

(*) 任意の Q の triangulation M に対して. 次の map φ' が存在する

map $\varphi': |M^{(n)}| \longrightarrow |L^{(n)}|$

s.t. (1) $d(\varphi', \varphi\,|\,|M^{(n)}|) < \varepsilon$

(2) 任意の map $\alpha: |L^{(n)}| \longrightarrow K(G, n)$ に対して.

map $\beta: |M^{(n+1)}| \longrightarrow K(G, n)$

s.t. $\beta\,|\,|M^{(n)}| = \alpha \circ \varphi'$

が存在する

定義. X の G 係数 approximable 次元が n 以下であるとは. 任意の polyhedron P, 連続写像 $f: X \longrightarrow P$ & $\varepsilon > 0$ に対して

polyhedron Q と連続写像 $\varphi: X \longrightarrow P$, $\psi: P \longrightarrow Q$

s.t. (1) $d(f, \psi\circ\varphi) < \varepsilon$

(2) ψ : (G, n, ε)-approximable

が存在することをいい, $a\text{-}\dim_G X \leq n$ と表わす。

ところで, conjecture を正確に書くと次のようになる。

問題2. 次の conditions は同値か?

1) $a\text{-}\dim_G X \leq n$

2) $G\text{-}a_m^{n+1}(X) = 0$

3) 任意の連続写像 $f: X \longrightarrow P$, ただし, P は polyhedron, に対して

$G\text{-}a_m^{n+1}(f) = 0$

部分解としては次のことがわかる。

定理1. $G = \mathbb{Z}$ または $\mathbb{Z}_p$ ならば, (問題2) は肯定的に成立する

(問題2) が肯定的に解けるならば, 次の定理と比較することによって, (問題1) は否定的な解を持つことがわかる

定理2 ([2]) $a\text{-}\dim_G X \leq n$ ならば, 高い次元の空間 Y と連続な全射

$f: Y \longrightarrow X$

s.t. $\check{H}^*(f^{-1}(x); G) = 0$ for all $x \in X$

が存在する

これまでの結果を総合的に見ると係数群Gが有限生成ならば、よい近似法を持つこと及び非輪状のresolutionの存在等、比較的わかりやすい成果が得られるが、無限生成である場合は何一つうまくいかないように思える。ここ10年ほどでコホモロジー次元は飛躍的に動いたが、大切なきっかけはEdwards-Walsh complexの構成であった。これをmodifyにいろいろ考えたが、無限生成群については使えそうにない。無限生成群をとらえるためには、まったく別のideaを開発することが必要と思われる。

参考文献

[1] A. N. Dranishnikov and E. V. Shchepin, Cell-like maps. The problem of raising dimension, Russian Math. Surveys, 41:6 (1986), 59-111

[2] A. Koyama, Approximable dimension and acyclic resolutions, preprint